Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls[1].

Von **Kurt Gödel** in Wien.

Whitehead und Russell haben bekanntlich die Logik und Mathematik so aufgebaut, daß sie gewisse evidente Sätze als Axiome an die Spitze stellten und aus diesen nach einigen genau formulierten Schlußprinzipien auf rein formalem Wege (d. h. ohne weiter von der Bedeutung der Symbole Gebrauch zu machen) die Sätze der Logik und Mathematik deduzierten. Bei einem solchen Vorgehen erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob das an die Spitze gestellte System von Axiomen und Schlußprinzipien vollständig ist, d. h. wirklich dazu ausreicht, jeden logisch-mathematischen Satz zu deduzieren, oder ob vielleicht wahre (und nach anderen Prinzipien ev. auch beweisbare) Sätze denkbar sind, welche in dem betreffenden System nicht abgeleitet werden können. Für den Bereich der logischen Aussageformeln ist diese Frage in positivem Sinn entschieden, d. h. man hat gezeigt[2], daß tatsächlich jede richtige Aussageformel aus den in den Principia Mathematica angegebenen Axiomen folgt. Hier soll dasselbe für einen weiteren Bereich von Formeln, nämlich für die des „engeren Funktionenkalküls"[3], geschehen, d. h. es soll gezeigt werden:

---

[1] Einige wertvolle Ratschläge bezüglich der Durchführung verdanke ich Herrn Prof. H. Hahn.

[2] Vgl. P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica". Math. Zeitschr. 25, 1926.

[3] In Terminologie und Symbolik schließt sich die folgende Arbeit an Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, an. Danach gehören zum engeren Funktionenkalkül diejenigen logischen Ausdrücke, welche sich aus Aussagevariablen: $X, Y, Z \ldots$ und Funktions-(= Eigenschafts- und Relations-)variablen 1. Typs: $F(x)$, $G(xy)$, $H(xyz) \ldots$ mittels der Operationen $\vee$ (oder), $\overline{}$ (nicht), (x) (für alle), (Ex) (es gibt) aufbauen, wobei die Präfixe (x), (Ex) sich nur auf Individuen, nicht auf Funktionen beziehen dürfen. Eine solche Formel heißt allgemeingültig (tautologisch), wenn bei jeder Einsetzung bestimmter Aussagen bzw. Funktionen für $X, Y, Z \ldots$ bzw. $F(x)$, $G(xy) \ldots$ ein wahrer Satz entsteht (z. B.: $(x)[F(x) \vee \overline{F(x)}]$).

Satz I: Jede allgemeingültige[4]) Formel des engeren Funktionenkalküls ist beweisbar.

Dabei legen wir folgendes Axiomensystem[5]) zugrunde:

Undefinierte Grundbegriffe: $\vee$, $\overline{}$, (x). [Daraus lassen sich in bekannter Weise &, $\rightarrow$, $\sim$, (Ex) definieren.]

Formale Axiome:

1. $X \vee X \rightarrow X$
2. $X \rightarrow X \vee Y$
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$
4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$
5. $(x) F(x) \rightarrow F(y)$
6. $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x) F(x)$.

Schlußregeln[6]):

1. Das Schlußschema: Aus A und $A \rightarrow B$ darf B geschlossen werden.

2. Die Einsetzungsregel für Aussage- und Funktionsvariable.

3. Aus $A(x)$ darf $(x) A(x)$ geschlossen werden.

4. Individuenvariable (freie oder gebundene) dürfen durch beliebige andere ersetzt werden, soweit dadurch keine Überdeckung der Wirkungsbereiche gleichbezeichneter Variabler eintritt.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, einige abgekürzte Bezeichnungen einzuführen.

(P), (Q), (R) etc. bedeuten irgendwie gebaute Präfixe, also endliche Zeichenreihen der Form: $(x)(Ey)$, $(y)(x)(Ez)(u)$ etc.

Kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ etc. bedeuten n-tupel von Individuenvariablen, d. h. Zeichenreihen der Form: $x\,y\,z$, $x_2\,x_1\,x_2\,x_3$ etc., wobei dieselbe Variable auch mehrmals auftreten kann. Entsprechend sind die Zeichen $(\mathfrak{x})$, $(E\mathfrak{x})$ etc. zu verstehen. Sollte in $\mathfrak{x}$ eine Variable mehrmals vorkommen, so hat man sie natürlich in $(\mathfrak{x})$, $(E\mathfrak{x})$ nur einmal angeschrieben zu denken.

Ferner benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen, die hier zusammengestellt seien. Die Beweise sind nicht angeführt, da sie teils bekannt, teils leicht zu ergänzen sind:

1. Für jedes n-tupel $\mathfrak{x}$ ist beweisbar:

$$\text{a)}\quad (\mathfrak{x}) F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x}) F(\mathfrak{x})$$

$$\text{b)}\quad (\mathfrak{x}) F(\mathfrak{x}) \,\&\, (E\mathfrak{x}) G(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})[F(\mathfrak{x}) \,\&\, G(\mathfrak{x})]$$

$$\text{c)}\quad (\mathfrak{x})\ \overline{F(\mathfrak{x})} \sim \overline{(E\mathfrak{x})\ F(\mathfrak{x})}$$

---

[4]) Genauer muß es heißen: „in jedem Individuenbereich allgemeingültig", was nach bekannten Sätzen dasselbe besagt wie: „im abzählbaren Individuenbereich allgemeingültig". — Bei Formeln mit freien Individuenvariablen $A(x, y \ldots w)$ bedeutet „allgemeingültig" die Allgemeingültigkeit von $(x)(y) \ldots (w) A(x, y \ldots w)$ und „erfüllbar" die Erfüllbarkeit von $(Ex)(Ey) \ldots (Ew) A$, so daß ohne Ausnahme gilt: „A ist allgemeingültig" ist gleichbedeutend mit: „$\overline{A}$ ist nicht erfüllbar."

[5]) Es stimmt (bis auf das von P. Bernays als überflüssig erwiesene associative principle) mit dem in Princ. Math., I, Nr. 1 und Nr. 10, gegebenen überein.

[6]) Diese sind bei Russell-Whitehead nicht alle explizit formuliert, werden aber in den Deduktionen fortwährend verwendet.

2. Unterscheiden sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ nur durch die Reihenfolge der Variablen, so ist beweisbar:

$$(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x}).$$

3. Besteht $\mathfrak{x}$ aus lauter verschiedenen Variablen und hat $\mathfrak{x}'$ dieselbe Stellenzahl wie $\mathfrak{x}$, so ist beweisbar:

$$(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x}')$$

auch dann, wenn in $\mathfrak{x}'$ mehrere gleiche Variable vorkommen.

4. Bedeutet (p_i) eines der Präfixe (x_i), (Ex_i), und (q_i) eines der Präfixe (y_i), (Ey_i), dann ist beweisbar:

$$(p_1)(p_2)\ldots(p_n)F(x_1 x_2 \ldots x_n) \,\&\, (q_1)(q_2)\ldots(q_m)G(y_1 y_2 \ldots y_m) \sim \sim (P)[F(x_1 x_2 \ldots x_n) \,\&\, G(y_1 y_2 \ldots y_m)]$$ [7])

für jedes Präfix (P), das sich aus den (p_i) und (q_i) zusammensetzt und der Bedingung genügt, daß für $i < k \leq n$ (p_i) vor (p_k) und für $i < k \leq m$ (q_i) vor (q_k) steht.

5. Jeder Ausdruck kann auf die Normalform gebracht werden, d. h. zu jedem Ausdruck A gibt es eine Normalformel N, so daß $A \sim N$ beweisbar ist[8]).

6. Ist $A \sim B$ beweisbar, dann auch $\mathfrak{F}(A) \sim \mathfrak{F}(B)$, wobei $\mathfrak{F}(A)$ einen beliebigen Ausdruck bedeutet, der A als Teil enthält (vgl. Hilbert-Ackermann, Theor. Log. III, § 7).

7. Jede allgemeingültige Aussageformel ist beweisbar, d. h. die Axiome 1—4 bilden ein vollständiges Axiomensystem für den Aussagenkalkül[9]).

Wir gehen jetzt zum Beweis von Satz I über und bemerken zunächst, daß er auch in folgender Form ausgesprochen werden kann:

Satz II: Jede Formel des engeren Funktionenkalküls ist entweder widerlegbar[10]) oder erfüllbar (und zwar im abzählbaren Individuenbereich).

Daß I aus II folgt, ergibt sich so: Sei A ein allgemeingültiger Ausdruck, dann ist $\overline{A}$ nicht erfüllbar, also nach II widerlegbar, d. h. $\overline{\overline{A}}$ folglich auch A ist beweisbar. Ebenso leicht sieht man die Umkehrung ein.

Wir definieren jetzt eine Klasse $\mathfrak{K}$ von Ausdrücken K durch folgende Festsetzungen:

1. K ist eine Normalformel.
2. K enthält keine freien Individuenvariablen.

---

7) Ein analoger Satz gilt für $\vee$ statt $\&$

8) Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundz. d. theor. Logik, III, § 8.

9) Vgl. die in Fußnote 2) zitierte Arbeit.

10) „A ist widerlegbar" soll bedeuten: „$\overline{A}$ ist beweisbar".

3. Das Präfix von K beginnt mit einem Allzeichen und endet mit einem E-Zeichen.

Dann gilt:

Satz III: Ist jeder $\mathfrak{K}$-Ausdruck entweder widerlegbar oder erfüllbar[11]), so gilt dasselbe von jedem Ausdruck.

Beweis: Sei A ein Ausdruck, der nicht zu $\mathfrak{K}$ gehört. Er möge die freien Variablen $\mathfrak{x}$ enthalten. Wie man sofort einsieht, folgt aus der Widerlegbarkeit von A die von $(E\mathfrak{x})A$ und umgekehrt (nach Hilfss. 1c und Schlußr. 3 bzw. Ax. 5); dasselbe gilt nach der Festsetzung in Fußnote[4]) für die Erfüllbarkeit. Sei $(P)N$ die Normalform von $(E\mathfrak{x})A$, so daß

$$(E\mathfrak{x})A \sim (P)N \tag{1}$$

beweisbar ist. Ferner setze man

$$B = (x)(P)(Ey)\left[N \& \{F(x) \vee \overline{F(y)}\}\right]^{12)}.$$

Dann ist

$$(P)N \sim B \tag{2}$$

beweisbar (auf Grund von Hilfss. 4 und der Beweisbarkeit von: $(x)(Ey)\left[F(x) \vee \overline{F(y)}\right]$). B gehört zu $\mathfrak{K}$, ist also nach Annahme entweder erfüllbar oder widerlegbar. Aber nach (1) und (2) zieht die Erfüllbarkeit von B die von $(E\mathfrak{x})A$, folglich auch die von A nach sich und dasselbe gilt für die Widerlegbarkeit. Auch A ist also entweder erfüllbar oder widerlegbar.

Auf Grund von Satz III genügt es also zu zeigen:

Jeder $\mathfrak{K}$-Ausdruck ist entweder erfüllbar oder widerlegbar.

Zu diesem Zweck definieren wir als Grad eines $\mathfrak{K}$-Ausdruckes[13]) die Anzahl der durch E-Zeichen voneinander getrennten Komplexe von Allzeichen seines Präfixes und zeigen zunächst:

Satz IV: Wenn jeder Ausdruck vom Grad k entweder erfüllbar oder widerlegbar ist, so gilt dasselbe auch von jedem Ausdruck vom Grad $k+1$.

Beweis: Sei $(P)A$ ein $\mathfrak{K}$-Ausdruck vom Grad $k+1$. Sei $(P) = (\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})(Q)$ und $(Q) = (\mathfrak{u})(E\mathfrak{v})(R)$, wobei (Q) den Grad k und (R) den Grad $k-1$ hat. Sei ferner F eine nicht in A vorkommende Funktionsvariable. Setzt man dann[14]):

---

[11]) „Erfüllbar" ohne Zusatz bedeutet hier und im folgenden immer: „erfüllbar im abzählbaren Individuenbereich". Dasselbe gilt für „allgemeingültig".

[12]) Die Variablen x, y sollen in (P) nicht vorkommen.

[13]) Im selben Sinn wird der Terminus „Grad eines Präfixes" verwendet.

[14]) Ein analoges Verfahren hat Th. Skolem zum Beweise des Löwenheimschen Satzes verwendet. Vidersk. Skrifter, Christiania 1920.

$$B = (\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')F(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}') \,\&\, (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})\left[F(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \to (Q)A\right]$$

und

$$C = (\mathfrak{x}')(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})(\mathfrak{u})(E\mathfrak{y}')(E\mathfrak{v})(R)\left\{F(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}') \,\&\, \left[F(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \to A\right]\right\}$$ [15],

so ergibt zweimalige Anwendung von Hilfss. 4 im Verein mit Hilfss. 6 die Beweisbarkeit von

$$B \backsim C; \tag{3}$$

weiter ist offenbar

$$B \to (P)A \tag{4}$$

allgemeingültig. Nun hat C den Grad k, ist also nach Annahme entweder erfüllbar oder widerlegbar. Ist es erfüllbar, dann auch $(P)A$ (nach (3) und (4)). Ist es widerlegbar, dann auch B (nach (3)), d. h. dann ist $\overline{B}$ beweisbar. Setzt man in $\overline{B}$ $(Q)A$ für F ein, so ergibt sich, daß in diesem Fall beweisbar ist:

$$\overline{(\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')(Q)A \,\&\, (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})\left[(Q)A \to (Q)A\right]}.$$

Da aber natürlich

$$(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})\left[(Q)A \to (Q)A\right]$$

beweisbar ist, so auch $\overline{(\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')(Q)A}$, d. h. in diesem Falle ist $(P)A$ widerlegbar. Tatsächlich ist also $(P)A$ entweder widerlegbar oder erfüllbar.

Es braucht jetzt nur noch gezeigt zu werden:

Satz V: Jede Formel ersten Grades ist entweder erfüllbar oder widerlegbar.

Zum Beweise sind einige Definitionen erforderlich. Sei $(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})A(\mathfrak{x};\,\mathfrak{y})$ (abgekürzt als $(P)A$) eine beliebige Formel ersten Grades. Dabei vertrete $\mathfrak{x}$ ein r-tupel, $\mathfrak{y}$ ein s-tupel von Variablen. Wir denken uns die der Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots x_i \ldots$ entnommenen r-tupel in eine Folge:

$$\mathfrak{x}_1 = (x_0\, x_0 \ldots x_0), \quad \mathfrak{x}_2 = (x_1\, x_0 \ldots x_0), \quad \mathfrak{x}_3 = (x_0\, x_1\, x_0 \ldots x_0) \text{ usw.}$$

nach steigender Indexsumme geordnet und definieren eine Folge $\{A_n\}$ aus $(P)A$ abgeleiteter Formeln folgendermaßen:

$$A_1 = A(\mathfrak{x}_1;\, x_1\, x_2 \ldots x_s)$$
$$A_2 = A(\mathfrak{x}_2;\, x_{s+1}\, x_{s+2} \ldots x_{2s}) \,\&\, A_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = A(\mathfrak{x}_n;\, x_{(n-1)s+1}\, x_{(n-1)s+2} \ldots x_{ns}) \,\&\, A_{n-1}$$

[15]) Die Variablenreihen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ sind natürlich als paarweise fremd vorausgesetzt.

Das s-tupel $x_{(n-1)s+1} \dots x_{ns}$ werde mit $\mathfrak{y}_n$ bezeichnet, so daß man hat:

$$A_n = A(\mathfrak{x}_n;\ \mathfrak{y}_n) \mathbin{\&} A_{n-1} \tag{5}$$

Ferner definieren wir $(P_n) A_n$ durch die Festsetzung:

$$(P_n) A_n = (E x_0)\,(E x_1) \dots (E x_{ns})\, A_n$$

Wie man sich leicht überzeugt, kommen in A_n gerade die Variablen x_0 bis x_{ns} vor, welche also sämtlich durch (P_n) gebunden werden. Ferner ist ersichtlich, daß die Variablen des r-tupels $\mathfrak{x}_{n+1}$ schon in (P_n) vorkommen (also insbesondere von den in $\mathfrak{y}_{n+1}$ vorkommenden verschieden sind). Was von (P_n) übrigbleibt, wenn man die Variablen des r-tupels $\mathfrak{x}_{n+1}$ wegläßt, werde mit (P'_n) bezeichnet, so daß, abgesehen von der Reihenfolge der Variablen $(E\mathfrak{x}_{n+1})\,(P'_n) = (P_n)$.

Diese Bezeichnungen vorausgesetzt, gilt:

Satz VI: Für jedes n ist beweisbar:

$$(P) A \rightarrow (P_n) A_n .$$

Zum Beweise wenden wir vollständige Induktion an:

I. $(P) A \rightarrow (P_1) A_1$ ist beweisbar, denn man hat:

$$(\mathfrak{x})\,(E\mathfrak{y})\, A(\mathfrak{x};\ \mathfrak{y}) \rightarrow (\mathfrak{x}_1)\,(E\mathfrak{y}_1)\, A(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1)$$

(nach Hilfssatz 3 und Schlußregel 4) und

$$(\mathfrak{x}_1)\,(E\mathfrak{y}_1)\, A(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1) \rightarrow (E\mathfrak{x}_1)\,(E\mathfrak{y}_1)\, A(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1)$$

(nach Hilfssatz 1a).

II. Für jedes n ist $(P) A \mathbin{\&} (P_n) A_n \rightarrow (P_{n+1}) A_{n+1}$ beweisbar, denn man hat:

$$(\mathfrak{x})\,(E\mathfrak{y})\, A(\mathfrak{x};\ \mathfrak{y}) \rightarrow (\mathfrak{x}_{n+1})\,(E\mathfrak{y}_{n+1})\, A(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \tag{6}$$

(nach Hilfssatz 3 und Schlußregel 4) und

$$(P_n) A_n \rightarrow (E\mathfrak{x}_{n+1})\,(P'_n)\, A_n \tag{7}$$

(nach Hilfssatz 2). Ferner

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{x}_{n+1})\,(E\mathfrak{y}_{n+1})\, A(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \mathbin{\&} (E\mathfrak{x}_{n+1})\,(P'_n)\, A_n \\ &\rightarrow (E\mathfrak{x}_{n+1})\left[(E\mathfrak{y}_{n+1})\, A(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \mathbin{\&} (P'_n)\, A_n\right]\end{aligned} \tag{8}$$

(nach Hilfssatz 1b bei der Einsetzung: $(E\mathfrak{y}_{n+1})\, A(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1})$ für F und $(P'_n)\, A_n$ für G).

Beachtet man, daß das Vorderglied der Implikation (8) die Konjunktion der Hinterglieder von (6) und (7) ist, so ergibt sich, daß beweisbar ist:

$$(P) A \,\&\, (P_n) A_n \rightarrow (E\mathfrak{x}_{n+1}) \left[(E\mathfrak{y}_{n+1}) A(\mathfrak{x}_{n+1}; \mathfrak{y}_{n+1}) \,\&\, (P'_n) A_n\right]. \quad (9)$$

Ferner folgt aus (5) und den Hilfss. 4, 6, 2 die Beweisbarkeit von:

$$(E\mathfrak{x}_{n+1}) \left[(E\mathfrak{y}_{n+1}) A(\mathfrak{x}_{n+1}; \mathfrak{y}_{n+1}) \,\&\, (P'_n) A_n\right] \sim (P_{n+1}) A_{n+1}. \quad (10)$$

Aus (9) und (10) folgt II und daraus im Verein mit I Satz VI.

Mögen in A die Funktionsvariablen $F_1, F_2, \ldots F_k$ und die Aussagevariablen $X_1, X_2 \ldots X_l$ vorkommen. A_n baut sich dann aus Elementarbestandteilen der Form:

$$F_1(x_{p_1} \ldots x_{q_1}),\; F_2(x_{p_2} \ldots x_{q_2}), \ldots;\; X_1, X_2, \ldots X_l$$

allein mittels der Operationen $\vee$ und $\overline{}$ auf. Wir ordnen jedem A_n eine Aussageformel B_n dadurch zu, daß wir die Elementarbestandteile von A_n durch Aussagevariable, u. zw. verschiedene (auch wenn sie sich nur in der Bezeichnung der Individuenvariablen unterscheiden) durch verschiedene Aussagevariable, ersetzen. Ferner bezeichnen wir als „Erfüllungssystem n-ter Stufe von $(P) A$" ein im Bereich der ganzen Zahlen z $(0 \leq z \leq ns)$ definiertes System von Funktionen $f_1^{(n)}, f_2^{(n)} \ldots f_k^{(n)}$, sowie von Wahrheitswerten $w_1^{(n)}, w_2^{(n)} \ldots w_l^{(n)}$ für die Aussagevariablen $X_1, X_2, \ldots X_l$ von der Art, daß, wenn man in A_n die F_i durch die $f_i^{(n)}$, die x_i durch die Zahlen i und die X_i durch die entsprechenden Wahrheitswerte $w_i^{(n)}$ ersetzt, ein wahrer Satz entsteht. Erfüllungssysteme n-ter Stufe gibt es offenbar dann und nur dann, wenn B_n erfüllbar ist.

Jedes B_n ist als Aussageformel entweder erfüllbar oder widerlegbar (Hilfssatz 7). Es sind also nur zwei Fälle denkbar:

1. Mindestens ein B_n ist widerlegbar. Dann ist, wie man sich leicht überzeugt (Schlußr. 2, 3; Hilfss. 1 c), auch das entsprechende $(P_n) A_n$ und folglich wegen der Beweisbarkeit von $(P) A \rightarrow (P_n) A_n$ auch $(P) A$ widerlegbar.

2. Kein B_n ist widerlegbar, also alle erfüllbar. Dann gibt es Erfüllungssysteme jeder Stufe. Da es aber für jede Stufe nur endlich viele Erfüllungssysteme gibt (wegen der Endlichkeit der zugehörigen Individuenbereiche) und da ferner jedes Erfüllungssystem $n+1$-ter Stufe ein solches n-ter Stufe als Teil enthält [16]) (was sich

[16]) Daß ein System $\{f_1, f_2 \ldots f_k; w_1, w_2 \ldots w_l\}$ Teil eines anderen $\{g_1, g_2 \ldots g_k; v_1, v_2 \ldots v_l\}$ ist, soll bedeuten, daß:

1. der Individuenbereich der f_i Teil des Individuenbereiches der g_i ist,
2. die f_i und g_i innerhalb des engeren Bereiches übereinstimmen,
3. für jedes i $v_i = w_i$ ist.

sofort aus der Bildungsweise der A_n durch fortgesetzte &-Verknüpfung ergibt), so folgt nach bekannten Schlußweisen, daß es in diesem Fall eine Folge von Erfüllungssystemen $S_1, S_2, \ldots S_k \ldots$ (S_k von k-ter Stufe) gibt, deren jedes folgende das vorhergehende als Teil enthält. Wir definieren jetzt im Bereich aller ganzen Zahlen $\geqq 0$ ein System $S = \{\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k; \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_l\}$ durch die Festsetzungen:

1. $\varphi_p (a_1 \ldots a_i)$ $(1 \leqq p \leqq k)$ soll dann und nur dann gelten, wenn für mindestens ein S_m der obigen Folge (und dann auch für alle folgenden) $f_p^{(m)} (a_1 \ldots a_i)$ gilt.

2. $\alpha_i = w_i^{(m)}$ $(1 \leqq i \leqq l)$ für mindestens ein (und dann auch für alle übrigen) S_m.

Dann ist ohneweiters ersichtlich, daß S die Formel $(P) A$ wahr macht. In diesem Falle ist also $(P) A$ erfüllbar, womit der Beweis der Vollständigkeit des oben angegebenen Axiomensystems zu Ende geführt ist. Es sei bemerkt, daß die nunmehr bewiesene Äquivalenz: „allgemeingültig = beweisbar" für das Entscheidungsproblem eine Reduktion des Überabzählbaren auf das Abzählbare beinhaltet, denn „allgemeingültig" bezieht sich auf die überabzählbare Gesamtheit der Funktionen, während „beweisbar" nur die abzählbare Gesamtheit der Beweisfiguren voraussetzt.

Man kann Satz I bzw. Satz II in verschiedener Richtung verallgemeinern. Zunächst ist es leicht, den Begriff der Identität (zwischen Individuen) in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, indem man zu den obigen Axiomen 1—6 zwei weitere

$$7.\ x = x \qquad 8.\ x = y . \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$$

hinzufügt. Auch für diesen erweiterten Bereich gilt dann analog wie oben:

Satz VII: Jede allgemeingültige (genauer: in jedem Individuenbereich allgemeingültige) Formel des erweiterten Bereiches ist beweisbar

und der mit VII äquivalente

Satz VIII: Jede Formel des erweiterten Bereiches ist entweder widerlegbar oder erfüllbar (u. zw. in einem endlichen oder abzählbaren Individuenbereich).

Zum Beweise werde mit A eine beliebige Formel des erweiterten Bereiches bezeichnet. Wir bilden eine Formel B als das Produkt (&-Verknüpfung) aus: A, $(x) x = x$ und den sämtlichen Formeln, die aus Axiom 8. durch Einsetzung der in A vorkommenden Funktionsvariablen für F entstehen, d. h. genauer:

$$(x)(y)\{x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]\}$$

für alle einstelligen Funktionsvariablen aus A,

$$(x)(y)(z)\{x = y. \rightarrow [F(xz) \rightarrow F(yz)]\} \;\&$$

$$(x)(y)(z)\{x = y. \rightarrow [F(zx) \rightarrow F(zy)]\}$$

für alle zweistelligen Funktionsvariablen aus A (inkl. „$=$" selbst) und entsprechenden Formeln für die drei- und mehrstelligen Funktionsvariablen aus A. Sei B' die Formel, welche aus B entsteht, wenn man darin das $=$-Zeichen durch eine sonst in B nicht vorkommende Funktionsvariable G ersetzt. Im Ausdruck B' kommt dann das $=$-Zeichen nicht mehr vor, er ist also nach dem früher Bewiesenen entweder widerlegbar oder erfüllbar. Ist er widerlegbar, dann gilt dasselbe für B, das ja aus B' durch Einsetzung von $=$ für G entsteht. B ist aber das logische Produkt aus A und einem aus den Axiomen 7, 8 offenbar beweisbaren Formelteil. Also ist in diesem Falle auch A widerlegbar. Nehmen wir jetzt an, daß B' durch ein gewisses System von Funktionen[17]) (S) im abzählbaren Individuenbereich Σ erfüllbar sei. Aus der Bildungsweise von B' ist ersichtlich, daß g (d. h. die für G einzusetzende Funktion des Systems S) eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist, also eine Klasseneinteilung der Elemente von Σ erzeugt, und zwar derart, daß Elemente derselben Klasse, für einander eingesetzt, an dem Bestehen oder Nichtbestehen einer im System S vorkommenden Funktion nichts ändern. Identifiziert man daher alle zu derselben Klasse gehörigen Elemente miteinander (etwa indem man die Klassen selbst als Elemente eines neuen Individuenbereiches nimmt), so geht g in die Identitätsrelation über und man hat eine Erfüllung von B, also auch von A. Tatsächlich ist also A entweder erfüllbar[18]) oder widerlegbar.

Eine andere Verallgemeinerung von Satz I erhält man durch Betrachtung von abzählbar unendlichen Mengen von logischen Ausdrücken. Auch für solche gilt ein Analogon zu I und II, nämlich:

Satz IX: Jede abzählbar unendliche Menge von Formeln des engeren Funktionenkalküls ist entweder erfüllbar (d. h. alle Formeln des Systems sind gleichzeitig erfüllbar) oder sie besitzt ein endliches Teilsystem, dessen logisches Produkt widerlegbar ist.

IX ergibt sich sofort aus:

---

[17]) Falls in A auch Aussagevariable vorkommen, muß natürlich S außer Funktionen noch Wahrheitswerte für diese Aussagevariablen enthalten.

[18]) Und zwar in einem höchstens abzählbaren Denkbereich (er besteht ja aus elementfremden Klassen des abzählbaren Individuenbereichs Σ).

Satz X: Damit ein abzählbar unendliches System von Formeln erfüllbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes endliche Teilsystem erfüllbar ist.

Bezüglich Satz X stellen wir zunächst fest, daß man sich bei seinem Beweise auf Systeme von Normalformeln ersten Grades beschränken kann, denn durch mehrmalige Anwendung des beim Beweise von Satz III und IV verwendeten Verfahrens auf die einzelnen Formeln kann man zu jedem Formelsystem Σ ein solches von Normalformeln ersten Grades Σ' angeben, derart, daß die Erfüllbarkeit irgend eines Teilsystems von Σ mit der des entsprechenden von Σ' gleichbedeutend ist.

Sei also

$$(\mathfrak{x}_1)(E\mathfrak{y}_1)A_1(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1),\ (\mathfrak{x}_2)(E\mathfrak{y}_2)A_2(\mathfrak{x}_2;\mathfrak{y}_2)\ \ldots\ (\mathfrak{x}_n)(E\mathfrak{y}_n)A_n(\mathfrak{x}_n;\mathfrak{y}_n)\ \ldots$$

ein abzählbares System Σ von Normalausdrücken ersten Grades, $\mathfrak{x}_i$ sei ein r_i-tupel, $\mathfrak{y}_i$ ein s_i-tupel von Variablen. $\mathfrak{x}_1^i, \mathfrak{x}_2^i \ldots \mathfrak{x}_n^i \ldots$ sei eine Folge sämtlicher aus der Folge $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ entnommener r_i-tupel nach steigender Indexsumme, ferner sei $\mathfrak{y}_k^i$ ein s_i-tupel von Variablen der obigen Folge von der Art, daß die Variablenfolge

$$\mathfrak{y}_1^1,\ \mathfrak{y}_2^1,\ \mathfrak{y}_1^2,\ \mathfrak{y}_3^1,\ \mathfrak{y}_2^2,\ \mathfrak{y}_1^3,\ \mathfrak{y}_4^1\ \ldots \text{ u. s. w.},$$

wenn man darin jedes $\mathfrak{y}_k^i$ durch das entsprechende s_i-tupel von x ersetzt, mit der Folge $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ identisch wird. Ferner definieren wir analog wie oben eine Folge von Formeln $\{B_n\}$ durch die Festsetzungen:

$$B_1 = A_1(\mathfrak{x}_1^1;\ \mathfrak{y}_1^1)$$

$$B_n = B_{n-1}\ \&\ A_1(\mathfrak{x}_n^1;\ \mathfrak{y}_n^1)\ \&\ A_2(\mathfrak{x}_{n-1}^2;\ \mathfrak{y}_{n-1}^2)\ \&\ \ldots$$

$$\ldots\ A_{n-1}(\mathfrak{x}_2^{n-1};\ \mathfrak{y}_2^{n-1})\ \&\ A_n(\mathfrak{x}_1^n;\ \mathfrak{y}_1^n).$$

Man übersieht leicht, daß $(P_n)B_n$ (d. h. die Formel, welche aus B_n entsteht, wenn sämtliche darin vorkommende Individuenvariable durch E-Zeichen gebunden werden) eine Folgerung der ersten n-Ausdrücke des obigen Systems Σ ist. Ist also jedes endliche Teilsystem von Σ erfüllbar, dann auch jedes B_n. Wenn aber jedes B_n erfüllbar ist, dann auch das ganze System Σ [was nach der beim Beweise von Satz V (vgl. S. 355) angewendeten Schlußweise folgt], womit Satz X bewiesen ist. IX und X lassen sich nach dem beim Beweise von VIII angewendeten Verfahren ohne Schwierigkeit auf Formelsysteme, welche das $=$-Zeichen enthalten, ausdehnen.

Man kann Satz IX noch eine etwas andere Wendung geben, wenn man sich auf Formelsysteme ohne Aussagevariable beschränkt und diese als Axiomensysteme auffaßt, deren Grundbegriffe die vorkommenden Funktionsvariablen sind. Dann besagt Satz IX offenbar, daß jedes endliche oder abzählbare Axiomensystem, in dessen Axiomen „alle" und „es gibt" sich niemals auf Klassen oder Relationen, sondern nur auf Individuen beziehen[19]), entweder widerspruchsvoll ist, d. h. ein Widerspruch sich in endlich vielen formalen Schritten herstellen läßt, oder eine Realisierung besitzt.

Zum Schluß möge noch die Frage der Unabhängigkeit der Axiome 1—8 erörtert werden. Was die Aussagenaxiome 1—4 betrifft, so ist ja bereits von P. Bernays[20]) gezeigt worden, daß keines von ihnen aus den drei anderen folgt. Daß an ihrer Unabhängigkeit auch durch Hinzunahme der Axiome 5—8 nichts geändert wird, kann durch genau dieselben Interpretationen gezeigt werden, wie sie Bernays verwendet, indem man diese auch auf Formeln, die Funktionsvariable und das =-Zeichen enthalten, ausdehnt durch die Festsetzung, daß:

1. die Präfixe und Individuenvariablen weggelassen werden,

2. in dem übrigbleibenden Formelteil die Funktionsvariablen ebenso wie Aussagevariable behandelt werden sollen,

3. für das Zeichen „=" immer nur einer der „ausgezeichneten" Werte eingesetzt werden darf.

Um die Unabhängigkeit von Axiom 5 zu zeigen, ordnen wir jeder Formel eine andere dadurch zu, daß wir die Bestandteile der Form:

$$(x)\,F(x),\ (y)\,F(y)\ldots;\ (x)\,G(x),\ (y)\,G(y)\ldots;\ \ldots,$$ [21])

falls solche in ihr vorkommen, durch $X \vee \overline{X}$ ersetzen. Dadurch gehen die Axiome 1—4, 6—8 in allgemeingültige Formeln über und dasselbe gilt, wie man sich durch vollständige Induktion überzeugt, von allen aus diesen Axiomen nach Schlußregel 1—4 abgeleiteten Formeln, während Axiom 5 diese Eigenschaft nicht besitzt. In genau der gleichen Weise zeigt man die Unabhängigkeit von Axiom 6, nur muß man hier $(x) F(x)$, $(y) F(y) \ldots$ etc. durch $X \& \overline{X}$ ersetzen. Um die Unabhängigkeit von Axiom 7 zu beweisen, bemerken wir, daß Axiom 1—6 und 8 (und daher auch alle daraus abgeleiteten Formeln) allgemeingültig bleiben, wenn man die Relation der Identität durch die leere Relation ersetzt, während das bei Axiom 7 nicht der Fall ist. Analog bleiben die aus Axiom 1—7 abgeleiteten Formeln auch dann noch allgemeingültig, wenn man die Identitäts-

---

[19]) Als Beispiel kann etwa das Hilbertsche Axiomensystem der Geometrie ohne die Stetigkeitsaxiome dienen.

[20]) Vgl. die in Fußnote [2]) zitierte Arbeit.

[21]) D. h. die einstelligen Funktionsvariablen F, $G \ldots$ etc. mit einem vorgesetzten Alloperator, dessen Wirkungsbereich lediglich das betreffende F, $G \ldots$ mit der zugehörigen Individuenvariablen ist.

relation durch die Allrelation ersetzt, während das für Axiom 8 (im Individuenbereich von mindestens zwei Individuen) nicht der Fall ist. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß keine der Schlußregeln 1—4 überflüssig ist, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden möge.

(Eingegangen: 22. X. 1929.)